Задание № 10 Аналитическое задание векторов

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Координаты вектора**

**Определение:** *прямоугольной (или декартовой) системой координат на плоскости* называется упорядоченная пара взаимно перпендикулярных осей с выбранным на них масштабом длины. Точка пересечения этих прямых называется *началом координат*, сами прямые – *осями координат*.

**Определение:** *прямоугольной (декартовой) системой координат в пространстве* называется упорядоченная тройка взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке, с выбранным на них масштабом длины. Точка пересечения этих прямых называется *началом координат*, сами прямые – *осями координат*.

**Определение**: *координатами вектора* на плоскости или в пространстве называются проекции этого вектора на оси координат.

**Теорема (о координатах вектора)**

1. Если точка  на плоскости имеет координаты , а точка  - координаты , то вектор  имеет координаты 
2. Если точка  в пространстве имеет координаты , а точка  - координаты , то вектор  имеет координаты 

*Замечание*: если вектор  имеет координаты , то этот факт будем записывать так: .

***Пример*:** Координаты точки А равны , а вектор  имеет координаты . Найти координаты точки В.

*Решение:* поскольку координаты вектора равны разности координат его конца и начала, то координаты его конца равны суммам координат его самого и его начала:.

Из определения координат, теоремы о свойствах проекций и следствия из нее следует:

**Теорема (линейные операции в координатах)**

Если  и , то







*Замечание*: при сложении (вычитании) двух векторов складываются (вычитаются) их соответственные координаты, при умножении вектора на число все координаты вектора умножаются на это число.

***Пример:*** Даны координаты двух векторов:  и . Найти координаты вектора .

*Решение:* ; ; .

Определение: если некоторый вектор  составляет с осями координат углы , то числа  называются *направляющими косинусами* этого вектора.

*Замечание:* из определения координат и направляющих косинусов следует: 

Теорема (длина вектора)

Длина вектора  равна 

*Замечание*: если вектор  задан на плоскости и , то



***Пример*:** Найти длину векторов  и .

*Решение*: 



**Теорема (свойства направляющих косинусов)**

Направляющие косинусы любого вектора удовлетворяют соотношению:



***Пример*:** Вектор  образует с осью  угол , а с осью - угол . Какой угол образует вектор  с осью ?

*Решение*: 

; .

Значит,  или 

**Теорема (свойства длины вектора)**

1. Для любых векторов  и : 
2. Для любого вектора  и любого числа : 

*Замечание:* Чтобы разложить вектор  по базе , , , т.е. найти числа  такие, что , необходимо и достаточно решить систему

,

в которой первое уравнение означает совпадение первых координат векторов  и , второе уравнение – совпадение вторых координат этих векторов, третье уравнение – совпадение третьих координат этих векторов.

***Пример:*** Разложить вектор  по базе , , .

*Решение*: , , .



Приравняем координаты по отдельности:



Решим систему по методу Гаусса: ;

.

Значит,  и .

Теорема (аналитическое условие коллинеарности)

Векторы  и  коллинеарны тогда и только когда , если в случае равенства 0 одного или нескольких знаменателей, соответствующие равенства понимать как пропорции.

*Доказательство* следует из теоремы о пропорциональности коллинеарных векторов и теоремы о линейных операциях в координатах.

*Замечание:* всюду в дальнейшем в выражениях подобных равенству  будем понимать их как пропорцию, чтобы отдельно не оговаривать случай равенства знаменателей нулю.

***Пример*:** Векторы  и  коллинеарны, поскольку верны «равенства» , рассматриваемые как пропорции: , , .

**Самостоятельная работа:**

**3.5.1.** На плоскости даны четыре точки ; ; ; .

а) Найти координаты вектора ;

б) Найти длину и направляющие косинусы вектора , где

 - начало координат;

в) разложить вектор  по базе , ;

**3.5.2.** Известны координаты векторов  и . Найти координаты векторов  и .

**3.5.3.** Вектор  составляет с положительным направление оси  угол , а с положительным направлением оси  - угол . Какой угол составляет вектор  с положительным направлением оси ?

**3.5.4.** Вектор  составляет с положительными направлениями координатных осей в пространстве равные углы. Найти координаты этого вектора, если его длина равна 3.

**3.5.5.** В пространстве заданы пять точек ; ; ; , .

а) Найти координаты вектора ;

б) Найти длину и направляющие косинусы вектора ;

в) Проверить, будет ли четырехугольник  трапецией;

г) Проверить, будет ли четырехугольник  параллелограммом;

д) Разложить вектор  по базе , , .

**3.5.6.** Даны три точки ; ; . Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через эти точки.

**3.5.7.** Даны четыре точки ; ; , . Найти координаты центра и радиус сферы, проходящей через эти точки.

**3.5.8.** На отрезке , где  и  найти точку  такую, что

а) .; б) ; в) ; г) ;

**3.5.9.** Даны координаты середин сторон треугольника ; ; . Найти координаты его вершин.

**3.5.10.** Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма  и  и точка пересечения его диагоналей . Найти координаты двух других вершин.

**Ответы:**

**3.5.1.**а); б) ; в) ;

**3.5.2.**  , . **3.5.3**  или .

**3.5.4.** или .

**3.5.5.** а) ; б) ;

в) да, так как ; г) да, так как ; д)  ;

**3.5.6.** Координаты центра окружности -, радиус .

**3.5.7.** Координаты центра сферы -, радиус .

**3.5.8** а) .; б) ; в) ; г) ;

**3.5.9.** ; ; ; **3.5.10.**  и ;